Zmienne losowe

Zmienne losowe oznacza się dużymi literami alfabetu łacińskiego, na przykład X, Y, Z. Natomiast wartości jakie one przyjmują odpowiednio małymi literami x, y, z i nazywa się je realizacjami.

Zmienną losową nazywamy zbiór wartości, które mogą być realizowane i którym przyporządkowane są jednoznacznie prawdopodobieństwa poszczególnych realizacji.

Zmienne losowe

Rozróżnia się dwa rodzaje zmiennych losowych a mianowicie: skokowe (dyskretne) i ciągłe.

Zmienne losowe, które przyjmują skończoną lub co najwyżej przeliczalną liczbę wartości nazywamy *skokowymi*. Przykładem może być tutaj liczba zakupionych lokali mieszkalnych w danej miejscowości, w danym okresie, albo liczba zajmowanych pokoi w mieszkaniu.

Przyporządkowanie wszystkim wartościom zmiennej losowej X prawdopodobieństwa określa rozkład zmiennej losowej skokowej.

Przyporządkowanie to nazywamy funkcją prawdopodobieństwa zmiennej losowej skokowej. Jeżeli oznaczymy przez x_i (i = 1, 2, … , n) wszystkie możliwe wartości zmiennej losowej X, to wówczas funkcję prawdopodobieństwa zapisujemy w następujący sposób:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p_i \qquad i = 1,2,\dots,n$$

przy czym:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

W przypadku, gdy zbiór wartości zmiennej losowej X jest nieskończony, wtedy spełniona jest równość: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Rozkład zmiennej losowej X można także zapisać za pomocą funkcji zwanej dystrybuantą:

$$F(x) = P(X < x).$$

Wartościami dystrybuanty są więc prawdopodobieństwa zdarzeń losowych polegających na tym, że zmienna losowa *X* przyjmuje wartości mniejsze niż liczba rzeczywista *x*.

Zmienna losowa, której wartością może być każda liczba rzeczywista z określonego przedziału tych liczb nazywamy zmienną losową ciągłą.

Rozkład zmiennej losowej ciągłej opisuje się za pomocą nieujemnej ciągłej funkcji f(x), zwanej funkcją gęstości prawdopodobieństwa, mającą następującą własność:

$$\int_a^b f(x)dx = P(a < X < b)$$

dla każdego $a \le b$.

Dystrybuanta dowolnej zmiennej losowej ma następujące własności:

$0 \le F(x) \le 1$, dla wszystkich x

Jeśli , $x_2 > x_1$ to , $F(x_2) \ge F(x_1)$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$$

ROZKŁAD DWUMIANOWY

W rozkładzie dwumianowym, nazywanym również od nazwiska jego twórcy rozkładem Bernoulliego, można wyróżnić dwa zdarzenia: sukces (występujęcy z prawdopodobieństwem *p*) i porażkę (występujacą z prawdopodobieństwem *q*). Prawdopodobieństwo *p* i *q* dla wszystkich losowań jest stałe, a losowania są niezależne.

Zmienną losową *X* jest liczba sukcesów. Prawdopodobieństwo uzyskania *k* sukcesów oblicza się według wzoru:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,n$$

gdzie:

q=1-p;   0≤p≤1;

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

n – liczba losowań,

p - prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczym losowaniu,

q - prawdopodobieństwo porażki w pojedynczym losowaniu.

Obliczane prawdopodobieństwa są składnikami rozwinięcia dwumianu Newtona $(p+q)^n$. Dlatego też, omawiany rozkład nazywany jest rozkładem dwumianowym (binomialnym). Fakt, że zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy o parametrach n i p zapisujemy następująco: $X:B(n,p)$.

Przykład

Właściciel pewnej firmy zajmującej się pośrednictwem nieruchomości na podstawie swoich obserwacji ocenił, że 30% klientów, którzy oglądali przynajmniej dwukrotnie daną nieruchomość, zdecydowali się w przyszłości na jej zakup.
W ostatnim miesiącu powyższy warunek spełniło 10 klientów. Obliczyć prawdopodobieństwo sprzedaży przynajmniej dwóch nieruchomości.

Rozwiązanie

$p = 0{,}3$

$q = 0{,}7$

$n = 10$

Należy obliczyć prawdopodobieństwo $P(X \geq 2)$.

W tym przypadku łatwiej będzie obliczyć zdarzenie przeciwne $P(X < 2)$, wiedząc że suma zdarzeń przeciwnych równa jest 1.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 0))$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0,3)^1 \cdot (0,7)^9 = \frac{10!}{9! \cdot 1!} \cdot (0,3)^1 \cdot (0,7)^9 = 10 \cdot 0,3 \cdot 0,040354 \approx 0,121$$

=ROZKŁAD.DWUM(1;10;0,3;FAŁSZ)

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0,3)^0 \cdot (0,7)^{10} = 1 \cdot 1 \cdot (0,7)^{10} \approx 0,0282$$

=ROZKŁAD.DWUM(0;10;0,3;FAŁSZ)

$$P(X \geq 2) = 1 - (0,121 + 0,0282) = 0,8508$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że przynajmniej dwóch z 10 klientów, którzy dwukrotnie oglądali tę samą nieruchomość w poprzednim miesiącu, dokona jej zakupu, wynosi 85,08%.

Rozkład Poissona

Rozkład Poissona jest rozkładem granicznym dla rozkładu dwumianowego.

Jeśli w rozkładzie Bernoulliego liczba doświadczeń n dąży do nieskończoności

a prawdopodobieństwo sukcesu k dąży do zera, wówczas prawdopodobieństwo $P(X=k)$ można obliczyć korzystając z następującego wzoru:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

gdzie:

$np = \lambda > 0$,

$e = 2{,}7182$ (e jest podstawą logarytmu naturalnego).

Rozkład Poissona wykorzystywany jest jako przybliżenie rozkładu dwumianowego. Przybliżenie to jest wystarczająco dobre wtedy, gdy $n \geq 20$ i jednocześnie $p \leq 0{,}2$.

Rozkład ten nazywany jest rozkładem zdarzeń rzadkich. Często wykorzystuje się go w statystycznej kontroli jakości, szczególnie wtedy, gdy - na przykład - kontroli podlega liczba wad w jednostce produktu.

Parametr λ jest zarówno wartością oczekiwaną jak i odchyleniem standardowym tego rozkładu. Fakt, że zmienna losowa X ma rozkład Poissona o parametrze λ zapisujemy następująco: $X{:}P(\lambda)$.

Przykład

Właściciel pewnej firmy pośredniczącej w sprzedaży nowych mieszkań stwierdził (na podstawie swoich doświadczeń), że 2% klientów reklamuje zakupione mieszkania z powodu występujących w nich wad budowlanych. Firma ta w zeszłym roku sprzedała 100 mieszkań. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nie więcej niż jeden klient będzie reklamował zakupione mieszkanie?

Rozwiązanie

$n = 100$

$p = 0,02$

$$\lambda = 100 \cdot 0,02 = 2$$

$$P(X \le 1) = P(X = 1) + P(X = 0)$$

$$P(X = 1) = \frac{2^1}{1} e^{-2} = 2 \cdot (2{,}7183)^{-2} = 0{,}2706$$

=ROZKŁAD.POISSON(1;2;FAŁSZ)

$$P(X = 0) = \frac{2^0}{1} e^{-2} = 1 \cdot (2{,}7183)^{-2} = 0{,}1353$$

=ROZKŁAD.POISSON(0;2;FAŁSZ)

$$P(X \le 1) = 0{,}2706 + 0{,}1353 = 0{,}4059$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wystąpi nie więcej niż jedna reklamacja wynosi 40,59%.

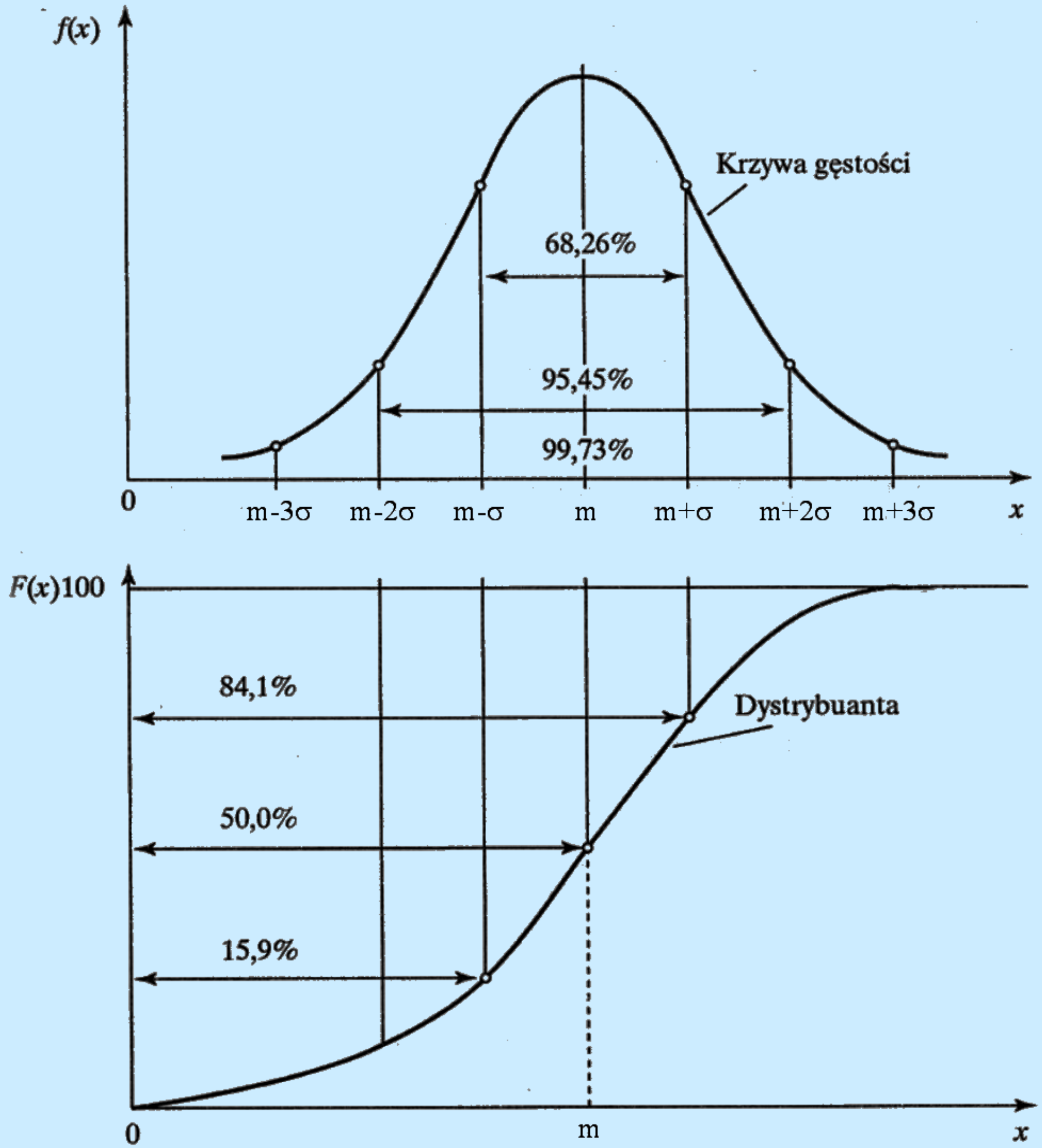
Rozkład normalny

Zmienna losowa *X* ma rozkład normalny *X:N(m,σ)*, jeżeli jej funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma postać:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right], \qquad -\infty < x < \infty$$

Własności rozkładu normalnego:

- jest rozkładem symetrycznym,
- do jego określenia potrzebne są dwa parametry: wartość oczekiwana *m* i odchylenie standardowe *σ,*
- wartość oczekiwana *m* jest jednocześnie medianą i modalną,
- wartości zmiennej losowej należą do zbioru liczb rzeczywistych, co jest charakterystyczne dla tego rozkładu.



Funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta normalnej zmiennej losowej

Dystrybuanta zmiennej losowej $X:N(m,\sigma)$ określona jest wzorem:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] dx,$$

Rysunek przedstawia własności funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty normalnej zmiennej losowej X.

Oprócz wyżej podanych własności na uwagę zasługuje reguła trzech sigm. Polega ona na tym, że niemal wszystkie możliwe realizacje zmiennej losowej $X:N(m,\sigma)$ należą do przedziału ($m-3\sigma$; $m+3\sigma$):

- 68,26% wartości zmiennej należy do przedziału ($m-\sigma$; $m+\sigma$),
- 95,45% wartosci zmiennej należy do przedziału ($m-2\sigma$; $m+2\sigma$),
- 99,73% wartości zmiennej należy do przedziału ($m-3\sigma$; $m+3\sigma$).

W rozważaniach teoretycznych i zastosowaniach istotną rolę odgrywa tzw. standaryzowana (znormalizowana lub unormowana) normalna zmienna losowa:

$$U = \frac{X - E(X)}{D(X)},$$

o wartościach:

$$u = \frac{x_0 - m}{\sigma}.$$

Po dokonaniu zabiegu standaryzacji wartość oczekiwana znormalizowanej zmiennej losowej jest równa 0, natomiast odchylenie standardowe przyjmuje wartość 1.

W tablicach można odczytać wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

lub dystrybuanty:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Obliczanie prawdopodobieństwa

a) Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia losowego A, polegającego na tym, że zmienna losowa $X{:}N(m,\sigma)$ przyjmie wartość mniejszą od x_0. Wykorzystując definicję dystrybuanty oraz dokonując normalizacji zmiennej losowej X zapisujemy

$$P(A) = P(X < x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{x_0 - m}{\sigma}\right) = \Phi(u_0).$$

Tablice dystrybuanty rozkładu normalnego opisane są z reguły dla wartości u z przedziału [0;4]. Tak więc:

dla $u_0 \geq 0$ wartość $\Phi(u_0)$ można odczytać bezpośrednio z tablicy

dla $u_0 < 0$ wartość $\Phi(u_0)$ obliczamy korzystając z zależności

$$\Phi(-u_0) = 1 - \Phi(u_0).$$

b) Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia losowego B, polegającego na tym, że zmienna losowa *X: N(m,σ)* przyjmie wartość większą niż x_0.

$$P(B) = P(X > x_0) = 1 - F(x_0) = 1 - \Phi\left(\frac{x_0 - m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(u_0).$$

Dalsze postępowanie jest analogiczne do podpunktu a)

c) Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia losowego C, polegającego na tym, że zmienna losowa *X: N(m,σ)* przyjmie wartość z przedziału (x_1, x_2):

$$P(C) = P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1).$$

Przykład

Zakładając, że ceny jednostkowe lokali mieszkalnych z danego przykładu w miejscowości A, w pierwszym kwartale 2017 r., mają rozkład zbliżony do rozkładu normalnego *N(3460;241)*, oszacować:

- Jaki procent lokali mieszkalnych jest tańszych niż 3300 zł/m^2?
- Jaki procent lokali mieszkalnych jest droższych niż 3600 zł/m^2?
- Jaki procent lokali mieszkalnych znajduje się przedziale cenowym od 3400 do 3600 zł/m^2?

Rozwiązanie

a) Korzystając z określonych wzorów obliczamy prawdopodobieństwo:

$$P(X<3300)=F(3300)=\Phi\left(\frac{3300-3460}{241}\right)=\Phi(-0{,}664)=1-\Phi(0{,}664)=1-0{,}745=25{,}5\%$$

=ROZKŁAD.NORMALNY(3300;3460;241;PRAWDA)

W celu uzyskania wartości dystrybuanty rozkładu normalnego *U: N (*0;1*)* należy wpisać formułę:
=ROZKŁAD.NORMALNY.S („wartość zmiennej standaryzowanej”)

Ceny jednostkowe 25,5% lokali mieszkalnych są niższe niż 3300 zł/m^2.

b) Należy obliczyć prawdopodobieństwo:

$$P(X > 3600) = 1 - F(3600) = 1 - \Phi\left(\frac{3600 - 3460}{241}\right) = 1 - \Phi(0{,}581) = 1 - 0{,}719 = 28{,}1\%$$

=1 - ROZKŁAD.NORMALNY(3600;3460;241;PRAWDA)

Ceny jednostkowe 28,1% lokali mieszkalnych są wyższe niż 3600 zł/m^2.

Należy obliczyć prawdopodobieństwo :

$$P(3400 < X < 3600) = F(3600) - F(3400) = \Phi\left(\frac{3600-3460}{241}\right) - \Phi\left(\frac{3400-3460}{241}\right) = \Phi(0{,}581) - \Phi(-0{,}249) =$$

$$= \Phi(0{,}581) - (1 - \Phi(0{,}249)) = 0{,}719 - 1 + 0{,}599 = 31{,}8\%$$

=ROZKŁAD.NORMALNY(3600;3460;241;PRAWDA)-ROZKŁAD.NORMALNY (3400;3460;241;PRAWDA)

Do zadanego przedziału cenowego należy 31,8% lokali mieszkalnych.

Pamiętając o właściwościach rozkładu normalnego można stwierdzić, że w poszczególnych przedziałach cenowych:
3460 ± 241 [zł/m^2] znajduje się 68,26% lokali mieszkalnych,
3460 ± 482 [zł/m^2] znajduje się 95,45% lokali mieszkalnych,
3460 ± 723 [zł/m^2] znajduje się 99,73% lokali mieszkalnych.

Reguła 3σ

$$P(|X-m|>\sigma)=0{,}3174$$

$$P(m-\sigma<X<m+\sigma)=0{,}6826$$

$$P(|X-m|>2\sigma)=0{,}0455$$

$$P(m-2\sigma<X<m+2\sigma)=0{,}9545$$

$$P(|X-m|>3\sigma)=0{,}0027$$

$$P(m-3\sigma<X<m+3\sigma)=0{,}9973$$

$$P(|X-m|>u_\alpha\sigma)=2\alpha$$

$$P(m-u_\alpha\sigma<X<m+u_\alpha\sigma)=1-2\alpha$$